Unidad X: Programación lineal (continuación)

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales.

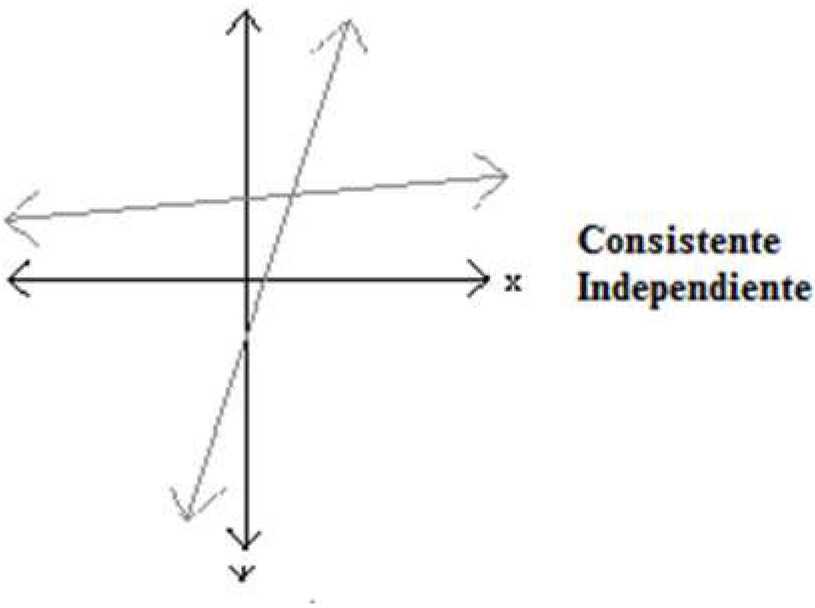
Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos.

10.1 Resolución geométrica[1]

Interpretación geométrica de las soluciones

Un sistema de ecuaciones diferenciales son aquellas que tienen varias posibilidades para su solución. Estas son:

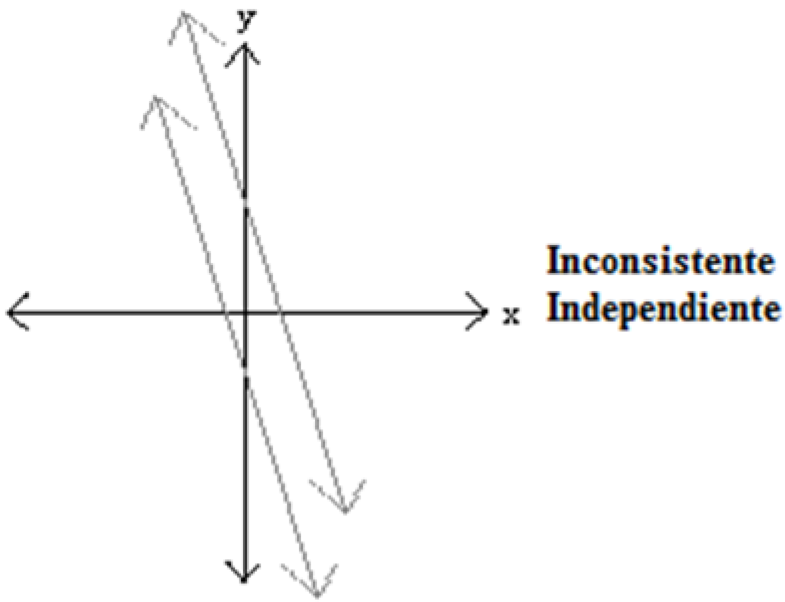
1. Solución única: Sólo es posible obtener una solución única para un sistema de ecuaciones lineales intersectado en un único punto determinado, por lo tanto, el sistema de ecuaciones donde tenemos todas las rectas entrecruzándose en un solo punto, se denomina como la solución única del sistema de ecuaciones. Ese sistema de ecuaciones lineales es llamado sistema de ecuaciones lineales consistente independiente. Gráficamente se representa,



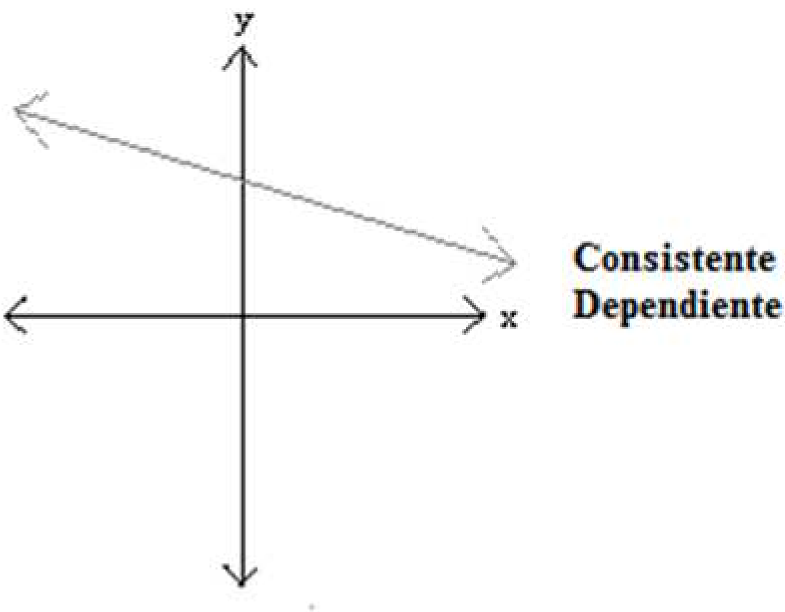
2. Sin solución: Es posible que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución cuando ningunas de sus rectas se intersectan entre sí ni siquiera en el infinito, ya que sólo el punto de intersección es la solución para el sistema de ecuaciones lineales Esto sólo puede ocurrir en el caso de las rectas paralelas, por lo tanto, para un sistema con este tipo de ecuación tenemos varias ecuaciones que corresponden a la misma recta y que sólo difieren por la pendiente. Dicho sistema se denomina sistema de ecuaciones lineales inconsistente independiente. Gráficamente podemos representarlo como,

---

[1] Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos.Wayne L. Winston, 4a Edicion. .



3. Infinitas soluciones: Sólo en la situación que las rectas de determinado sistema se encuentren unas con otras en un punto infinito, podemos obtener soluciones infinitas. Esto sólo puede suceder si todas las rectas son la misma recta, ya que es en este escenario que se superpondrán unas con otras dándonos puntos infinitos de intersección, es decir, infinitas soluciones. Este sistema es llamado sistema de ecuaciones lineales consistente dependiente. Gráficamente podemos representarlo como,

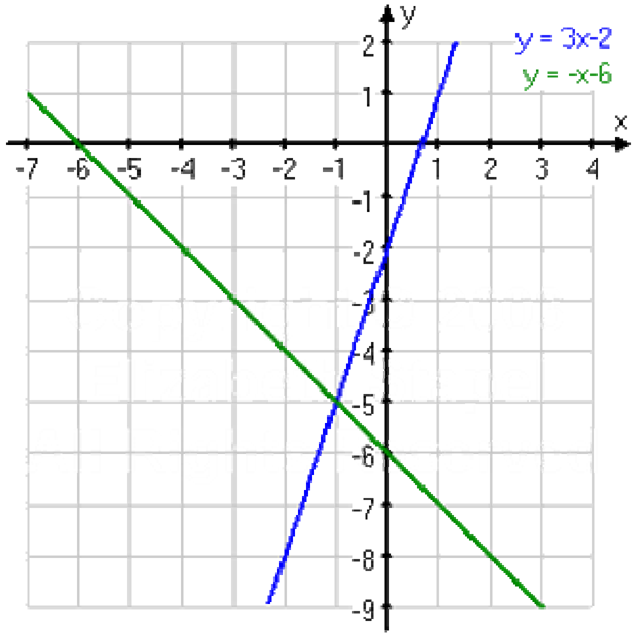


Con la ayuda de un ejemplo, vamos a entender las diversas soluciones posibles.

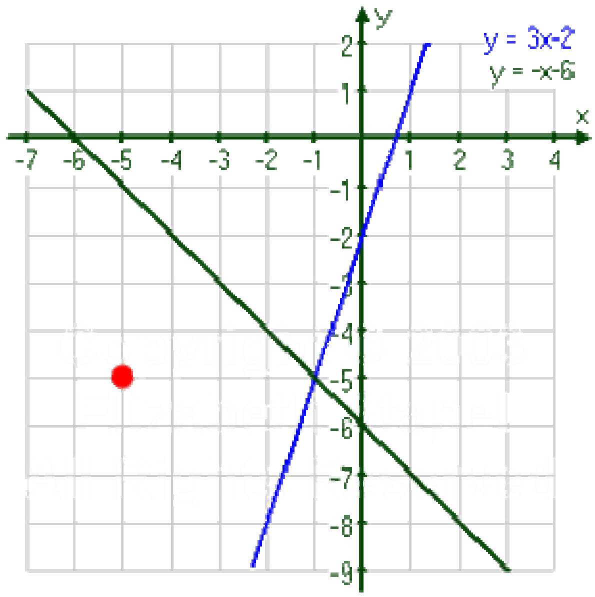
Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales dado como,

$y = 3x – 2$ $y = -x – 6$

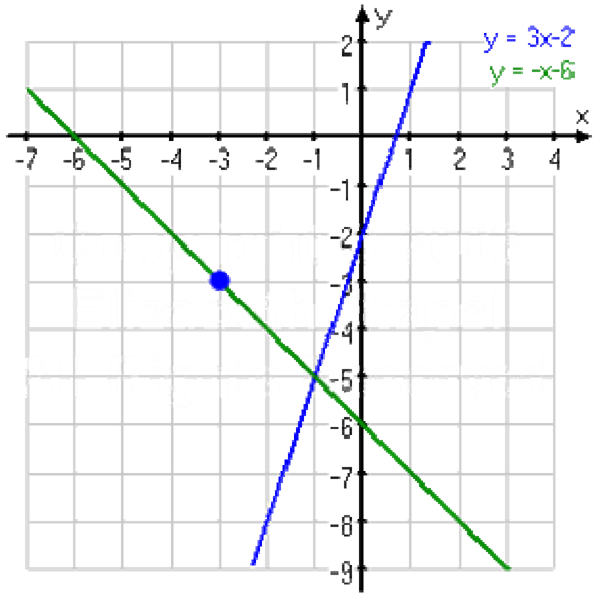
La representación gráfica de las ecuaciones puede darse como,



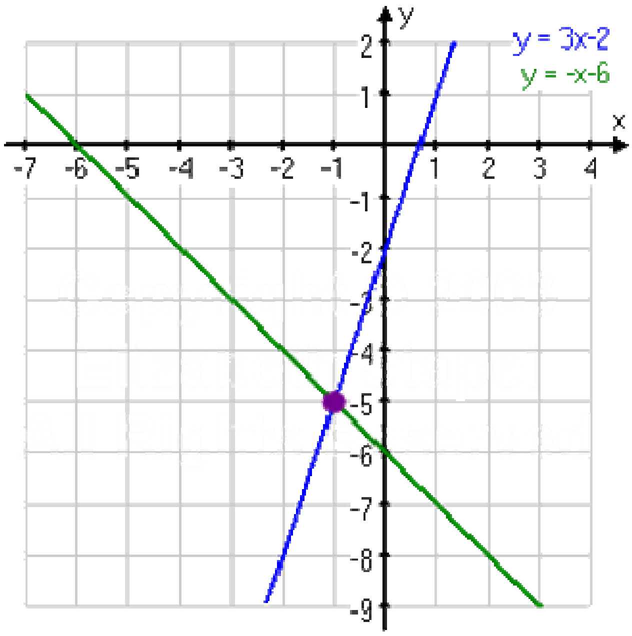
Ya sabemos que en el caso de una sola recta, todos los puntos que intersectan con esa recta son llamados solución de la ecuación, sin embargo al tratar con un sistema de ecuaciones, la situación es diferente. En tal situación para que un punto sea la solución del sistema de ecuación dado, necesita estar sobre cada recta definida en el sistema de ecuación dado. Por lo tanto, si nos fijamos en el diagrama siguiente,



El punto resaltado con color rojo no puede considerarse como una solución, ya que no se encuentra en ninguna de las rectas definidas en el sistema de ecuaciones.



Tampoco podemos considerar el punto resaltado en color azul como la solución, ya que se encuentra en una sola recta y no en la otra, por lo tanto, puede considerarse como la solución para la recta y =-x - 6, pero no la del sistema dado.



Finalmente, el punto destacado en el color púrpura es la solución del sistema de ecuación, ya que está en ambas rectas definidas para el sistema dado. También ésta es la solución única del sistema dado, porque ambas líneas no se intersectan en algún otro punto. Por tanto, llamamos a este sistema un sistema de ecuaciones lineales consistente independiente.

10.2 El conjunto de soluciones factibles[2]

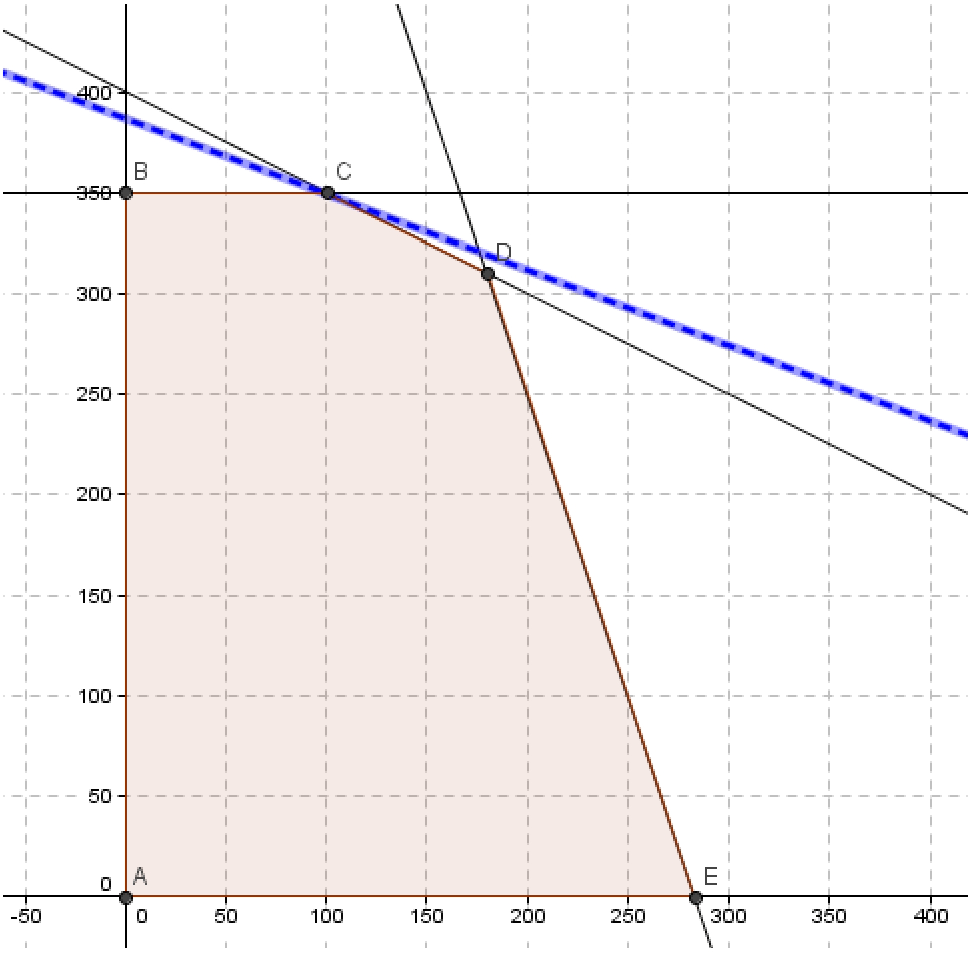
En Programación Lineal una solución básica factible es aquella que además de pertenecer a la región o área factible del problema se puede representar a través de una solución factible en la aplicación del Método Simplex satisfaciendo las condiciones de no negatividad. En este contexto una solución básica factible corresponderá a uno de los vértices del dominio de factibilidad cuya coordenada o solución se puede representar a través de un conjunto de restricciones activas para el modelo. Para desarrollar el concepto anterior consideremos el siguiente problema de optimización matemática (lineal):

$$\text{Max } 3X + 8Y$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2X + 4Y &\leq 1.600 \quad (R1) \\ 6X + 2Y &\leq 1.700 \quad (R2) \\ Y &\leq 350 \quad (R3) \\ X &\geq 0 \\ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

La resolución gráfica del problema anterior haciendo uso de Geogebra se presenta en el siguiente gráfico:



El área achurada corresponde al dominio de factibilidad del problema, identificándose en particular 5 vértices que hemos llamado arbitrariamente A, B, C, D y E. La solución óptima del modelo lineal se

---

2 Sitio de Internet monografias.com.

alcanza en el vértice C donde X=100 e Y=350 con valor óptimo V(P)=3.100. Notar que dicha solución se puede obtener a través de la resolución de un sistema de ecuaciones con las restricciones 1 y 3 (R1 y R3) en igualdad.

En consecuencia el vértice C además de ser una solución básica factible es una solución básica factible óptima. En cuanto a los vértices A, B, D y E son soluciones básicas factibles (no óptimas) debido a que en la aplicación del Método Simplex al menos una variable no básica tendrá costo reducido negativo (lo que permitirá mejorar el actual valor de la función objetivo). La tabla a continuación es la que se obtiene al llevar al problema a su forma estándar, agregando S1, S2 y S3 como variables de holgura de las restricciones 1, 2 y 3, respectivamente (R1, R2 y R3).

Ambas variables no básicas (iniciales) X e Y tienen costo reducido negativo (-3 y -8) por tanto X=0 e Y=0 que si bien es una solución básica factible (vértice A) no es solución óptima. Para continuar la demostración realizaremos una iteración del Método Simplex incorporando la variable Y a la base (criterio costo reducido "más negativo") y donde el mínimo cuociente Min {1.600/4; 1.700/2; 350/1}=350 ==> S3 deja la base:

La solución básica factible ahora es X=0 e Y=350 (vértice B), sin embargo, el costo reducido de la variable X sigue siendo negativo y por tanto aún no nos encontramos en el óptimo. En consecuencia X entra a la base y obtenemos el mínimo cuociente: Min {200/2; 1.000/6}=100 ==> S1 deja la base:

Finalmente se alcanza la solución óptima (solución básica factible óptima) con X=100 e Y=350 (vértice C) donde todas las variables no básicas (S1 y S3) tienen costos reducido mayor o igual a cero, cumpliendo con el criterio de optimalidad.

¿Qué sucede con los vértices D y E? También son soluciones básicas factibles (no óptimas) que se podrían encontrar por ejemplo incorporando en primera instancia (tabla inicial) a la variable X a la base. De esta forma se debería alcanzar el vértice E luego de una iteración y el vértice D en una segunda iteración. Notar que también existen otras soluciones factibles (no básicas) como por ejemplo X=100 e Y=100 que pertenecen al dominio de soluciones factibles pero no se puede representar a través de la resolución de un sistema de ecuaciones.

10.3 El algoritmo del símplex[3]

En optimización matemática, el término algoritmo símplex habitualmente se refiere a un conjunto de métodos muy usados para resolver problemas de programación lineal, en los cuales se busca el máximo de una función lineal sobre un conjunto de variables que satisfaga un conjunto de inecuaciones lineales. El algoritmo simplex primal fue desarrollado por el matemático norteamericano George Dantzig en 1947, y procede examinando vértices adyacentes del poliedro de soluciones. Un algoritmo simplex es un algoritmo de pivote.

Un método llamado de manera similar, pero no relacionado al anterior, es el método Nelder-Mead (1965) o método de descenso (o ascenso) símplex; un método numérico que busca un mínimo (o máximo) local de una función cualquiera examinando en cada paso los vértices de un simplex.

Considerar un problema de programación lineal,

Maximizar $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeto a $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$

[3] Sitio de Internet , Enciclopedia internacional, Wikipedia.com.

Maximizar $z$en: El algoritmo símplex requiere que el problema de programación lineal esté en la forma aumentada de la programación lineal. El problema puede ser escrito como sigue, en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x},\, \mathbf{x}_s \geq 0$$

Donde x son las variables desde la forma estándar, xs son las variables de holgura introducidas en el proceso de aumentación, c contiene los coeficientes de optimización, describe el sistema de ecuaciones contraídas, y Z es la variable a ser maximizada.

El sistema es típicamente no determinado, desde que el número de variables excede el número de ecuaciones. La diferencia entre el número de variables y el número de ecuaciones nos da los grados de libertad asociados con el problema. Cualquier solución, óptima o no, incluirá un número de variables de valor arbitrario. El algoritmo símplex usa cero como valor arbitrario, y el número de variables con valor cero es igual a los grados de libertad.

Valores diferentes de cero son llamados variables básicas, y valores de cero son llamadas variables no básicas en el algoritmo símplex.

Esta forma simplifica encontrar la solución factible básica inicial, dado que todas las variables de la forma estándar pueden ser elegidas para ser no básicas (cero), mientras que todas las nuevas variables introducidas en la forma aumentada, son básicas (diferentes de cero), dado que su valor puede ser calculado trivialmente ($\mathbf{x}_{s\,i} = \mathbf{b}_j$ para ellas, dado que la matriz problema aumentada en diagonal es su lado derecho)

En cada una de las desigualdades que se plantean en el modelo matemático de programación lineal, se plantean desigualdades de <, >, ≤, ≥ o =; estas desigualdades se convierten en igualdades completando con variables de holgura si se trata de menor o igual que, o menor que; en el caso de que sea mayor o igual que o mayor que, se completa con variables de excedente, estas con signo negativo ya que como su nombre lo indica, es una cantidad que esta de excedente y hay que quitar para convertirla en igualdad; en caso se maneje el =, se manejan las variables artificiales.

Conceptos básicos

Forma estándar

Es la igualación de las restricciones del modelo planteado, así como el aumento de variables de holgura, o bien la resta de variables de exceso.

Ejemplo:

Modelo original	**Forma estándar**
F.O.: Max z= 60x1 + 30x2 + 20x3 Sujeta a: 8x1 + 6x2 + x3 ≤ 48 4x1 + 2x2 + 1.5x3 ≤ 20 2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 ≤ 8 x2 ≤ 5 xj ≥ 0 j= 1,2,3	F.O.: Max z= 60x1 + 30x2 + 20x3 Sujeta a: 8x1 + 6x2 + x3 + x4 = 48 4x1 + 2x2 + 1.5x3 + x5 = 20 2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 + x6 = 8 x2 + x7 = 5 xj ≥ 0 j= 1,2,3,4,5,6,7

Forma canónica

En el método Simplex es de bastante utilidad la forma canónica, especialmente para explorar la relación de dualidad.

Un problema de Programación Lineal se encuentra en la forma canónica si se cumplen las siguientes condiciones:

Para el caso de la forma canónica de maximización:

- La función objetivo debe ser de maximización.
- Las restricciones son del tipo ≤.
- Las variables de decisión son mayores o iguales a cero.

Para el caso de la forma canónica de la dieta:

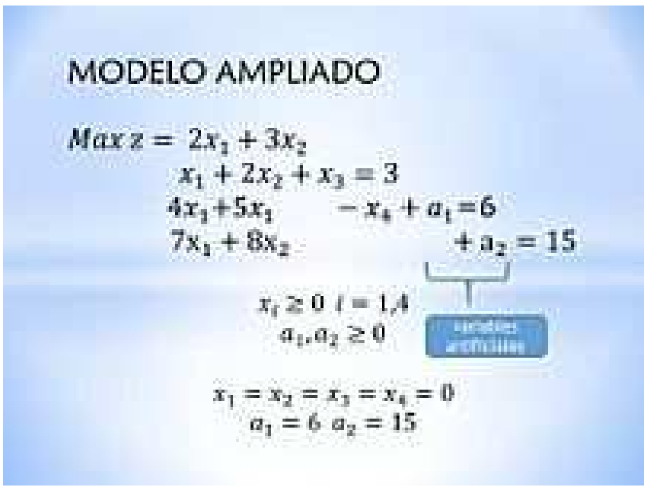
- La función objetivo es minimizada.
- Las restricciones son de tipo ≥.
- Las variables de decisión son mayores o iguales a cero.

Ejemplo:

Forma canónica de maximización:	**Forma canónica de dieta:**
Maximizar z=2x1 + 3x2 + 5x3 Sujeto a: 2x1 + 3x2 + 8x3 ≤ 8 5x1 + 2x2 + 4x3 ≤ 9 x1,x2 ≥ 0	Minimizar z= -x1 - 3x2 Sujeto a: x1 – x2 ≥ 6 -x1 + 2x2 ≥ 8 x1,x2 ≥ 0

Modelo Ampliado

Cuando se introduce en cada restricción una variable artificial que no contenga una variable de holgura.



Variables de entrada

Estas suelen encontrarse en un criterio que se conoce como “Condición de optimalidad”, en un modelo, ya sea de optimización o minimización, y se refiere a la variable no básica en el renglón “z” con el coeficiente más negativo, si se trata de una maximización, o el coeficiente más positivo, si se trata de una minimización, la cual, en el la tabla de solución anterior, a excepción de la primer tabla, esta variable era una variable básica.

Variables de salida

Esta variable es un punto extremo que se encuentra en un criterio conocido como “Condición de factibilidad”, en un modelo, ya sea de optimización o minimización, y se refiere a la variable básica asociada con la mínima razón no negativa con el coeficiente más negativo, si se trata de una maximización, o el coeficiente más positivo, si se trata de una minimización, la cual, en el la tabla de solución siguiente, pasará a ser variable no básica.

	Variables básicas	**Variables no básicas**	**Variable de entrada**	**Variable de salida**
A	X3, X4, X5, X6	X1, X2	X1	X2
B	X3, X4, X5, X1	X6, X2	X2	X3
C	X2, X4, X5, X1	X6, X3	X6	X4
D	X2, X6, X5, X1	X4, X3	X3	X1
E	X2, X6, X5, X3	X4, X1	X4	X2

Variable degenerada

Una variable degenerada es una variable básica que vale 0. Gráficamente esto puede ocurrir cuando más de dos rectas se intersequen en el mismo punto.

Base

Conjunto de variables básicas. En el ejemplo anterior, la base es {X3, X4, X5, X6}

Variable no restringida

Variable artificial

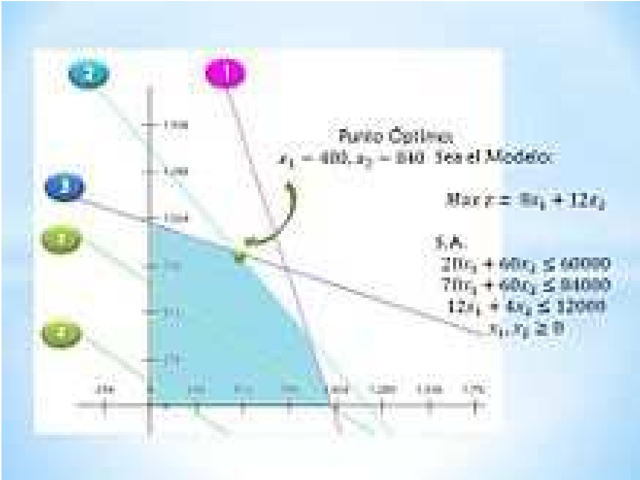
Se usa una variable artificial cuando las restricciones son = y ≥ y sucede cuando el origen no se encuentra dentro de la región factible, tratando de llevar el modelo a otra dimensión en la cual el origen si exista en la región.

Es aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no-negativas.

Función objetivo:

Define la efectividad del modelo como función de las variables de decisión.

Solución óptima



Siempre está asociada a un punto extremo de la región factible y satisface todas las restricciones si se evalúa en ellas así como es el punto que en el caso de maximización hace que el valor de z sea el máximo (más grande) y el caso de minimización sea el mínimo (más pequeño).

Solución óptima múltiple

Existen problemas lineales que no tienen una solución óptima única, sino que al contrario, tienen un número infinito de soluciones. Para detectar una solución múltiple en la tabla óptima, se deberá tener al menos una variable con su Zj-Cj=0 no básica.

Algoritmo del método simplex

Este proceso que se repite una y otra vez, siempre inicia en un punto extremo de la región factible que normalmente es el origen, en cada iteración se mueve a otro punto extremo adyacente hasta llegar a la solución óptima.

Los pasos del Método Simplex son los siguientes:

1. Utilizando la forma estándar, determinar una solución básica factible inicial igualando a las n-m variables igual a cero (el origen).
2. Seleccionar la variable de entrada de las variables no básicas que al incrementar su valor pueda mejorar el valor en la función objetivo. Cuando no exista esta situación, la solución actual es la óptima; si no, ir al siguiente paso.
3. Seleccionar la variable de salida de las variables básicas actuales.
4. Determinar la nueva solución al hacer la variable de entrada básica y la variable de salida no básica, ir al paso 2 (actualizar).

Ejemplo:

Considerando el problema de programación lineal:

Minimiza la siguiente función

$$Z = -2x - 3y - 4z$$

Sujeta a

$$3x + 2y + z \leq 10$$

$$2x + 5y + 3z \leq 15$$

$$x,\ y,\ z \geq 0$$

Se añaden las variables de holgura s y t, que se representan en la tabla canónica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Donde las columnas 5 y 6 representan las variables básicas s y t y la correspondiente solución básica posible es

$$x = y = z = 0,\ s = 10,\ t = 15.$$

Las columnas 2, 3 y 4 pueden ser seleccionadas como columnas pivotes, para este ejemplo se seleccionó la columna 4. Los valores de x resultantes de la elección de las filas 2 y 3 como filas pivotes son 10/1 = 10 y 15/3 = 5 respectivamente. De estos el mínimo es 5, por lo que la fila 3 sería la fila pivote. Operando los pivotes se produce

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -20 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora columnas 4 y 5 representan las variables básicas z y s y la solución óptima correspondiente es

$$x = y = t = 0,\ z = 5,\ s = 5.$$

Para el paso siguiente, no hay entradas positivas en la fila objetivo y de hecho

$$Z = -20 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{11}{3}y + \tfrac{4}{3}t$$

Por lo que el valor mínimo de Z es −20.